

# KOMPETENCIJE I VREDNOVANJE U (DODATNOJ) NASTAVI MATEMATIKE

Matija Bašić, PMF-MO

*Stručni skup nastavnika matematike,  
Zagreb, kolovoz 2016.*

# KOMPETENCIJE ZA 21. STOLJEĆE

kompetencije su znanja, vještine i sposobnosti, te stavovi

za 21. stoljeće označava potrebe modernog društva, zanimanja budućnosti

EU inicijativa: Lisabon Agenda (2000-2010) i Europe 2020

održivi ekonomski razvoj, društvo temeljeno na znanju, promicanje aktivnog građanstva. ostvarivanje cjeloživotnog obrazovanja i mobilnosti, podrška državama EU u razvoju vlastitih obrazovnih sustava i poboljšavanju kvalitete i efikasnosti, poticanje kreativnosti, inovativnosti i poduzetništva

**matematička kompetencija** i osnovne kompetencije u prirodoslovlju i tehnologiji – jedna od osam ključnih kompetencija *Europskog referentnog okvira za cjeloživotno učenje*

# NACIONALNI OKVIRNI KURIKULUM MATEMATIKA

## Domene

- brojevi
- algebra i funkcije
- oblik i prostor
- mjerenje
- podatci
- infinitezimalni račun

## Procesi

- prikazivanje i komunikacija
- povezivanje
- logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje
- rješavanje problema i matematičko modeliranje
- primjena tehnologija

# GENERIČKE KOMPETENCIJE (ONK)

## Oblici mišljenja

- Rješavanje problema i donošenje odluka
- Metakognicija
- Kriičko mišljenje
- Kreativnost i inovativnost

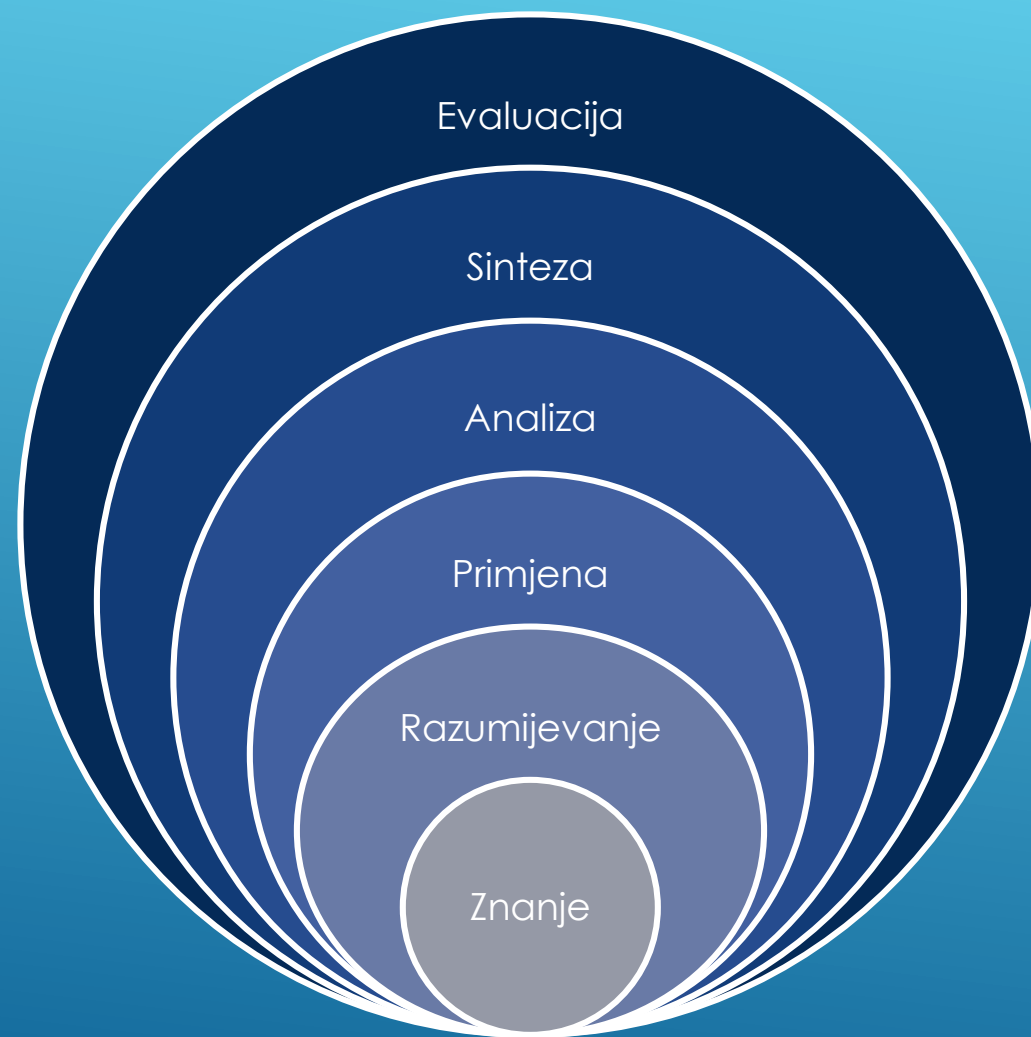
## Osobni i socijalni razvoj

- Upravljanje sobom
- Upravljanje obrazovnim i profesionalnim razvojem
- Povezivanje s drugima
- Aktivno građanstvo

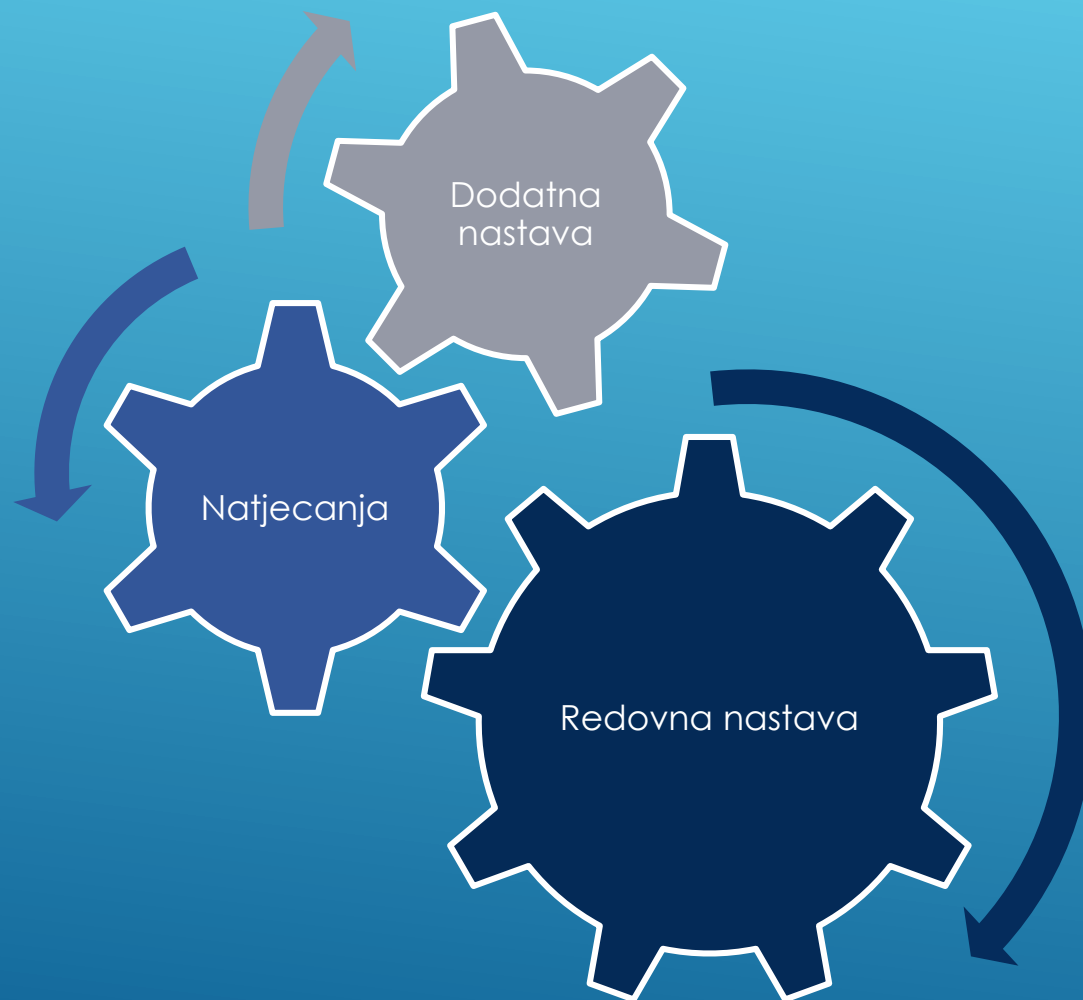
## Oblici rada i korištenje alata

- Komunikacija
- Suradnja
- Informacijska pismenost
- Digitalna pismenost

# BLOOMOVA TAKSONOMIJA



# REDOVNA I DODATNA NASTAVA



# NAČELA I CILJEVI NATJECANJA IZ MATEMATIKE

1. pravednost i transparentnost
2. poticanje izvrsnosti
3. promicanje znanosti kao pokretača razvoja modernog društva
4. popularizacija matematike i uključivost svih učenika
5. sinergijsko djelovanje svih sudionika

# PRAVEDNOST I TRANSPARENTNOST

Hrvatska  
matematička  
olimpijada

revizija  
županijskog  
natjecanja



# KAKO OSIGURATI SVA NAČELA ISTOVREMENO?

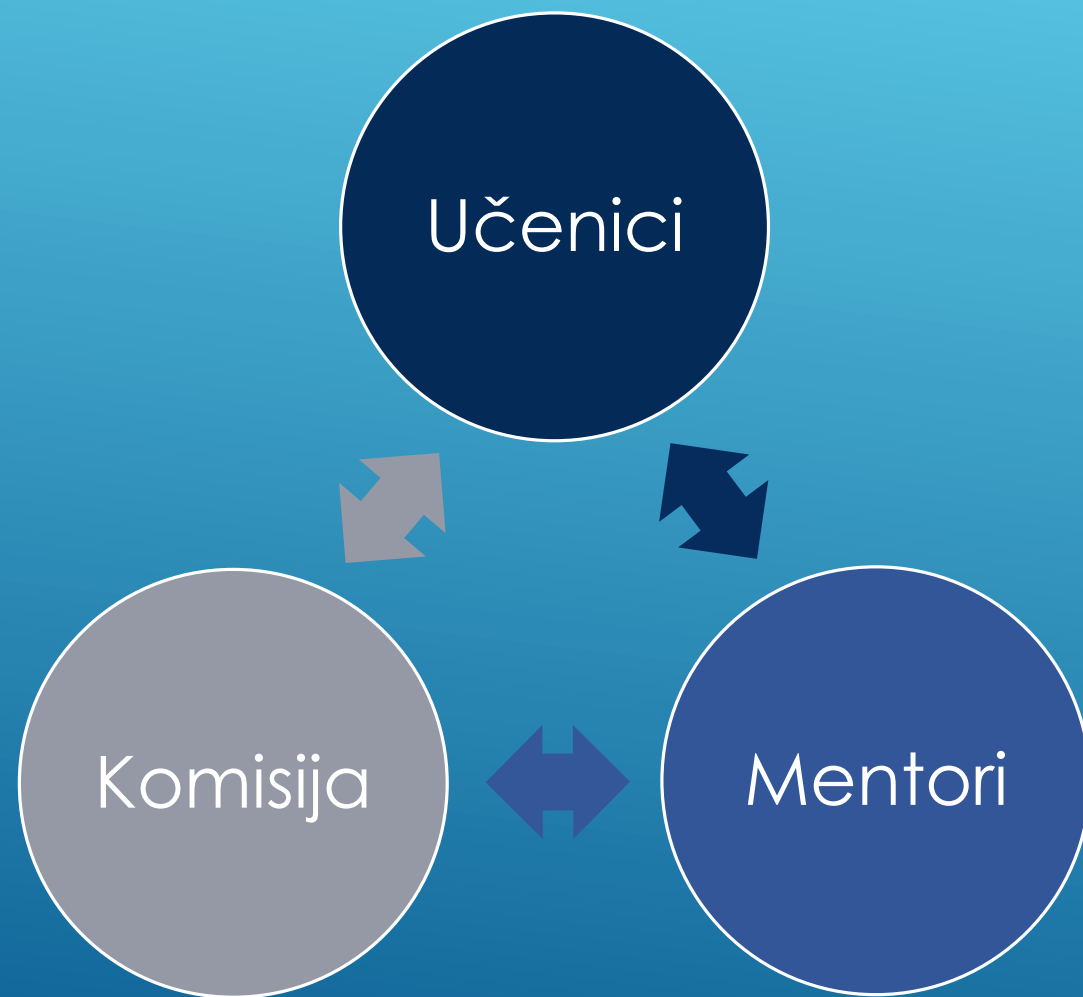


poticanje izvrsnosti



popularizacija

# NAČELO SINERGIJSKOG DJELOVANJA



# NATJECANJA IZ MATEMATIKE I KOMPETENCIJE

*Mane klasičnog pristupa podučavanja  
(nastavnik prezentira rješenja zadataka  
kao ilustraciju određene metode):*

nedostatak vremena  
da se "pokriju sve  
metode"

učenici su pasivni i ne  
usvajaju način  
razmišljanja

nedostaje izgradnja  
samopouzdanja i  
samostalnosti  
učenika

učenik ne  
prepoznaje ključne  
elemente i nema  
povratnu informaciju  
o svom znanju kako  
bi mogao izgraditi  
realistična  
očekivanja

# NATJECANJA IZ MATEMATIKE I KOMPETENCIJE

## *Aktivirajući pristup:*

učenje  
istraživanjem  
(minimalne  
intervencije  
nastavnika)

nastavnik s  
učenikom  
rješava  
zadatke koje  
nije prije vidio  
(istraživački  
pristup)

pokazivanje  
strategija  
rješavanja  
umjesto  
metoda

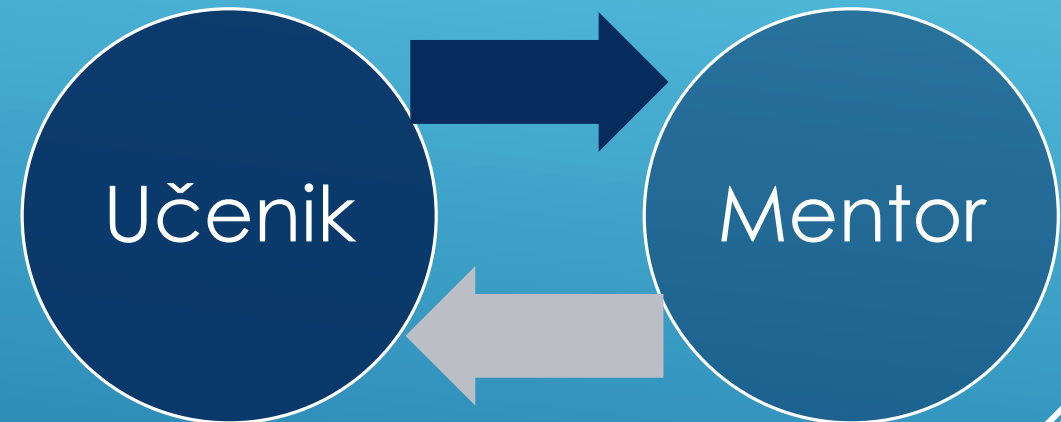
učenik  
samostalno  
pronalazi i  
grupira  
zadatke

pokazati  
emocije  
(prenošenje  
interesa)

**postizanje  
aha-efekta**

# ULOGA MENTORA

- **partnerski odnos, autoritet temeljen na znanju**
- poticanje autonomnog učenja, preuzimanja odgovornosti i razvoj samopouzdanja
- poticanje individualnosti, razvoj vlastitog pristupa rješavanju problema
- pomoć u integraciji, zaštita od ruganja
- podrška u nošenju sa stresom i pritiskom
- prikaz pogrešaka kao ishodište za učenje i kao sastavni dio života
- isticanje temeljne uloge matematike u razvoju društva, veza sa svakodnevnim životom i primjenama



# DODATNA NASTAVA – ISHODI UČENJA

Učenik...

koristi matematičke metode i alate s razumijevanjem

koristi matematički jezik, uvodi vlastite oznake i pomoćne elemente sa svrhom;

pristupa zadacima koje nije prije vidio sa samopouzdanjem da ih može riješiti;

uspješno artikulira i prenosi svoje misli drugima (pismeno i usmeno);

koristi tehnologiju u rješavanju problema i učenju

samostalno uči i traži materijale vezane za određenu temu

svjesno koristi **strategije rješavanja problema**

kritički pristupa svom radu

slijedi svoju prirodnu znatiželju i pokazuje želju za učenjem

preuzima odgovornost za svoje učenje i napredovanje

ima realistična očekivanja

prepoznaje ulogu matematike u razvoju modernog društva

# RJEŠAVANJE PROBLEMA

## Strategije

- prisjećanje relevantnih situacija, informacija i metoda
- samostalno ispitivanje posebnih slučajeva
- otkrivanje uzorka koristeći vlastite logiku
- postavljanje hipoteze
- dokazivanje i opovrgavanje hipoteze
- konstrukcija primjera i kontraprimjera za svoje slutnje
- kombinirana primjena razmišljanja unatrag i unaprijed
- formuliranje kreativnih alternativa
- stvaranje i izvršavanje plana rješavanja problema
- kritičko evaluiranje ideja

# DODATNA NASTAVA

## SVRHA

- pri uvođenju oznaka i dodatnih elemenata rješenje objasniti svrhu – je li svrha nama poznata? jesmo li samostalno došli do onoga o čemu pričamo?

## PLAN

- planirati vrijeme za pitanja, poticati raspravu – planirati znači pripremiti se za moguće smjerove u kojima rasprava može otići, potrebna fleksibilnost

## JASNOĆA

- jasno uvesti nove koncepte (pojmove, metode), naglasak na malom broju ključnih osnovnih koncepata, ne poticati preskakanje

## PODRŠKA

- pronaći ravnotežu u odnosu, poticanje u inicijalnim fazama, strpljivost, pažljivo prepuštanje odgovornosti učeniku da preuzme inicijativu, poticanje samostalnosti, ohrabivanje

## METAKOGNICIJA

- osvijestiti strategije i više oblike razmišljanja koje koristimo, mijenjati kontekst, povezivati sa primjenama



# VREDNOVANJE NATJECATELJA

## Natjecanje

sumativno vrednovanje  
(vrednovanje naučenog)

vanjsko vrednovanje

normativno vrednovanje



## Dodatna nastava

formativno vrednovanje (vrednovanje  
kao učenje i vrednovanje za učenje)

samovrednovanje

# PREGLED TEMA, VREDNOVANJE I ISPRAVLJANJE NA NATJECANJIMA

## Radionica

- Matija Bašić,  
Algebra i  
Geometrija
- Azra Tafro,  
Kombinatorika i  
Teorija brojeva

# LITERATURA

## Zbirke za rješavanje problema iz matematike

- 1. Arthur Engel, Problem Solving Strategies
- 2. Paul Zeitz, The Art and Craft of Problem Solving
- 3. Loren C. Larson, Problem-Solving Through Problems
- 4. Svetoslav Savchev, Titu Andreescu, Mathematical Miniatures
- 5. Babinskaja, Zadaci s ruskih matematičkih natjecanja
- 6. Dušan Djukić et al., IMO Compendium
- 7. Željko Hanjš, Međunarodne matematičke olimpijade
- 8. George Polya, Kako riješiti matematički zadatak? (How to solve it?)
- 9. George Polya, Matematičko otkriće
- 10. Yufei Zhao, <http://yufeizhao.com/olympiad.html>
- 11. Titu Andreescu et al., Problems Around the World (zbirke 1996-97, 1997-98, 1998-99, 1999-2000, 2000-01)
- 12. Materijali s priprema, <http://natjecanja.math.hr>

# PREGLED TEMA

## ALGEBRA

- najvažniji ishodi: manipuliranje algebarskim izrazima, nejednakosti, osnovna svojstva elementarnih funkcija
- dodatna literatura:
  - Kiran Kedlaya,  $A < B$  (A is less than B)
  - Titu Andreescu, Zuming Feng, 101 Problems in Algebra
  - B. J. Venkataschala, Functional Equations: A Problem Solving Approach
  - Radmila Bulajich Manfrino et al., Topics in Algebra and Analysis

# PREGLED TEMA

## ALGEBRA

- skupovi i skupovne operacije
- osnovne računске operacije i karakteristična svojstva skupova racionalnih i realnih brojeva (decimalni brojevi, aproksimacije, uređaj, od 1.r.) te kompleksnih brojeva (konjugiranje, algebarska zatvorenost, od 2.r.)
- **algebrski izrazi**, rješavanje, (ne)jednadžbi i sustava, uključujući ideju supstitucije
- **nejednakosti** (dodatna tema na svim razinama osim školske u 1.r.) -
- računanje konačnih zbrojeva (Gaussova dosjetka, rastav na parcijalne razlomke, teleskopiranje, od 1.r.)
- korištenje matematičke indukcije u dokazivanju algebarskih tvrdnji, nizovi i redovi (4.r.)
- **pojam funkcije, svojstva elementarnih funkcija i njihovih grafova**
  - funkcija najveće cijelo (od 1.r.),
  - linearna funkcija, (veza s proporcionalnošću, 1.r.),
  - kvadratna funkcija i polinomi višeg stupnja (značenje diskriminante, traženje nultočaka, Vieteove formule, 2.r.),
  - eksponencijalna i logaritamska funkcija (eksponencijalna formula, monotonost, pojam inverza, od 3.r. na natjecanjima),
  - trigonometrijske funkcija (adicijske formule, izvođenje ostalih formula, periodičnost, ograničenost 3.r.)
- funkcijske jednadžbe (4.r.)

# PREGLED TEMA

## GEOMETRIJA

- sintetičke i analitičke metode
- najvažniji ishodi: svrhovito crtanje dodatnih elemenata, geometrijski zor, angle chasing, zapisivanje dokaza
- dodatna literatura:
  - Anđelko Marić, Planimetrija
  - Evan Chen, Euclidean Geometry in Mathematical Olympiad
  - Yufei Zhao (notes), Lemmas in Euclidean Geometry
  - Arseniy Akopyan, Geometry in Figures
  - Vladimir Prasolov, Plane Geometry
  - Sotirios E. Louridas, Michael Th. Rassias, Problem-Solving and Selected Topics in Euclidean Geometry
  - Mea Bombardelli, Dijana Ilišević, Elementarna geometrija, skripta za istoimeni kolegij na PMF-MO

# PREGLED TEMA

## GEOMETRIJA

- Pitagorin i Euklidov teorem
- sukladnost i sličnost - uočavanje i korištenje u složenim dokazima
- paralelnost i kutovi - korištenje transverzale, zbroj kutova u trokutu, dijagonale paralelograma se raspolavljaju
- karakteristične točke trokuta – dokazivanje konkurentnosti pravaca, teorem o simetrali kuta, srednjica trokuta, težište dijeli težišnicu u omjeru 2:1
- površine - rastavljanja likova i osnovne formule za površinu trokuta, metoda površine u dokazima iz planimetrije
- krug i kružnica (1.r. od državne razine, ostali razredi od školske razine)
  - tetivni četverokut: obodni i središnji kut, Talesov teorem, potencija točke obzirom na kružnicu
  - tangencijalni četverokut: jednakost duljina odsječaka tangenti
- primjena trigonometrije - teorem o sinusima i teorem o kosinusu (3.r.)
- stereometrija (3.r.) - računanje obujma geometrijskih tijela, crtanje presjeka tijela ravninom
- vektori (3.r.)
- analitička geometrija - koordinatna metoda (od 1.r.), krivulje drugog reda (na natjecanjima od 4.r.)

# PREGLED TEMA

## KOMBINATORIKA

- najvažniji ishodi: dokaz egzistencije (eksplicitno i neeksplicitno), dokazivanje nemogućnosti određene situacije, prebrojavanje
- dodatna literatura:
  - Mario Krnić, Dirichletov princip
  - Maja Cvitković, Kombinatorika
  - Darko Veljan, Kombinatorna i diskretna matematika
  - predavanja i vježbe iz kolegija Diskretna matematika, PMF-MO
  - Titu Andreescu, Zuming Feng, 102 Combinatorial Problems
  - Jiri Herman et al., Counting and Configurations
  - Pablo Soberón, Problem-Solving Methods in Combinatorics



# PREGLED TEMA

## KOMBINATORIKA

- logički zadaci
- Dirichletov princip
- prebojavanje
- invarijante
- princip ekstrema
- optimizacija (ekstremalna kombinatorika)
- matematička indukcija u kombinatornim zadacima (od 3. r. )

# PREGLED TEMA

## TEORIJA BROJEVA

- najvažniji ishodi: korištenje faktorizacije/djeljivosti, dokazivanje da diofantska jednačbe nema rješenja
- dodatna literatura:
  - Peter Vandendriessche, Hoojoo Lee, Problems in Elementary Number Theory (project PEN)
  - Michael Th. Rassias, Problem-Solving and Selected Topics in Number Theory
  - Naoki Sato, Number Theory
  - Dolinka, Elementarna teorija brojeva
  - Andrej Dujella, Uvod u teoriju brojeva, skripta za istoimeni kolegij na PMF-MO

# PREGLED TEMA

## TEORIJA BROJEVA

- zadaci sa znamenkama, korištenje dekadskog sustava, kriterij djeljivosti sa 3 i 9
- djeljivost – djelitelji (broj, sparivanje), mjera, rastav na proste faktore
- Euklidov algoritam i linearne diofantske jednačbe
- metoda faktorizacije
- metoda kvocijenta
- periodičnost ostataka potencija modulo  $n$

# PREGLED TEMA

## INTERDISCIPLNARNE TEME

- kombinatorna geometrija
- primjena trigonometrije u geometriji
- analitička geometrija
- kombinatorna teorija brojeva
- geometrijska vjerojatnost
- itd.

# SMJERNICE ZA IZRADU BODOVNE SCHEME

Idealna situacija: prvo vidjeti sve testove, a onda izraditi kriterije bodovanja

Samostalno riješiti zadatak

Prikupiti što više različitih rješenja

Odrediti ključne korake – lakše napraviti shemu s manjim rasponom bodova

Revidirati i usporediti bodovanja različitih rješenja

Pojasniti specifične situacije napomenama

## ZADATAK IZ GEOMETRIJE

U konveksnom četverokutu ABCD vrijedi  $\sphericalangle BAD = 50^\circ$ ,  $\sphericalangle ADB = 80^\circ$  i  $\sphericalangle ACB = 40^\circ$ . Ako je  $\sphericalangle DBC = 30^\circ + \sphericalangle BDC$ , izračunaj  $\sphericalangle BDC$ .

# ZADATAK IZ GEOMETRIJE

koje dodatne  
elemente možemo  
docrtati? s kojim  
ciljem?

je li trigonometrijsko  
rješenje jednostavnije  
ili složenije od  
sintetičkog?

koje kutove možemo  
izračunati? pojavljuju  
li se tetivni  
četverokuti?



# ZADATAK IZ TEORIJE BROJEVA

Za prirodne brojeve  $a$ ,  $b$  i prost broj  $p$  vrijedi  $a^2 + p^2 = b^2$ . Dokaži da je  $2(b+p)$  kvadrat nekog prirodnog broja.

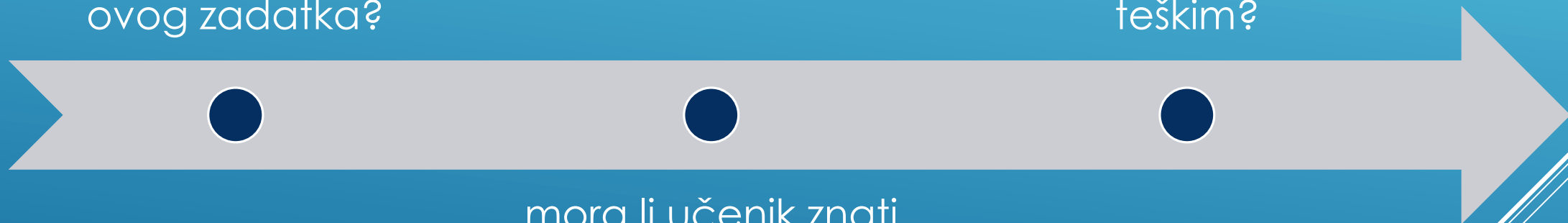


# ZADATAK IZ TEORIJE BROJEVA

postoji li „najprirodniji način“ za rješavanje ovog zadatka?

što čini zadatak teškim?

mora li učenik znati za Pitagorine trojke?



# HVALA NA PAŽNJI

- ▶ kontakt: [mbasic@math.hr](mailto:mbasic@math.hr)
- ▶ [web.math.pmf.unizg.hr/~mbasic/](http://web.math.pmf.unizg.hr/~mbasic/)